Formelsamling
”matny’s handbook”

Senaste versionen finns på http://nyrell.se
mattias@nyrell.se

14 augusti 2008

Innehåll

Kapitel 1

Gott och blandat

1.1 Triggformler etc

1.1.1 Standard triggformler

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

1.1.2 Specialare

$\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_1 t) = \frac{\sin((\omega_0 - \omega_1)t) + \sin((\omega_0 + \omega_1)t)}{2}$ (kommer från en uppgift i kretsteori del 2)

$a \sin\varphi + b \cos\alpha = A \cos(\varphi + \alpha)$, där $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.2 Hyperboliska funktioner

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \Re$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

1.3 Logaritmregler

$\log 1 = 0$

$\log (s \cdot t) = \log s + \log t$
$\log \frac{s}{t} = \log s - \log t$
$\log s^t = t \log s$

${}^b\log s = \frac{{}^a\log s}{{}^a\log b}$

1.4 Standardgränsvärden

$\frac{x^\alpha}{a^x} \to 0 \quad \text{då} \quad x \to \infty$

$\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0 \quad \text{då} \quad x \to \infty$

$x^\alpha \ln x \to 0 \quad \text{då} \quad x \to 0^+$

$\frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to 0$

$(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e \quad \text{då} \quad x \to 0$

$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to 0$

$\frac{e^x - 1}{x} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to 0$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \quad \text{då} \quad n \to \infty$

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1} \quad \text{då} \quad n \to \infty$ (OBS. Detta räknas kanske inte alltid som ett standardgränsvärde.)

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{då} \quad n \to \infty$

$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{då} \quad n \to \infty$

$\frac{a^n}{n!} \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty$

$\sqrt[n]{n!} \to \infty \quad \text{då} \quad n \to \infty$

1.5 Derivata

Derivatan, $f^{'}(x)$, till funktionen $f(x)$, definieras som:

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1.5.1 Några deriveringsregler

$D(fg) = f^{'}g + fg^{'}$
$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f^{'}g - fg^{'}}{g^2}$

1.5.2 Derivator av elementära funktioner

$De^x = e^x$

$D \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

$D \ln |x| = \frac{1}{|x|}, \quad x \neq 0$

$D \ln |f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) \neq 0$

$D \log^a x = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0$

$Da^x = a^x \ln a$

$Dx^a = ax^{a-1}, \quad x > 0$

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$

$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi$

$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

$D \sinh x = \cosh x$

$D \cosh x = \sinh x$

$D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$

$D \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}, \quad \neq 0$

1.6 Partialbråksuppdelning

Betrakta $\frac{r(x)}{h(x)}$ där grad$r(x)$<grad$h(x)$, och nämnaren $h(x)$ har faktoriserats så långt det går i reella faktorer. Nu vill vi skriva om uttrycket på följande sätt:

$$\frac{r(x)}{h(x)} = Pb_1 + Pb_2 + ...$$

Där Pb_i är partialbråk till $\frac{r(x)}{h(x)}$.

De möjliga faktorerna i nämnaren ger upphov till olika typer av partialbråk enligt följande:

Faktor i nämnaren	Partialbråk
$x-a$	$\frac{A_1}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
x^2+ax+b	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b}$
$\left(x^2+ax+b\right)^n$	$\frac{A_1x+B_1}{x^2+ax+b} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+ax+b)^n}$

1.7 Bra att ha

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Kapitel 2

Komplexa tal

Den imaginära enheten, i, definieras som:

$$\mathrm{i}^2 = -1$$

Ett komplext tal, z, kan skrivas som:

$$z = a + \mathrm{bi} = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ där}$$
$$a, b \in \Re$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = \text{argumentet till z}$$

2.1 Eulers formler

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

Kapitel 3

Mängdlära

3.1 Egenskaper

Kardinalitet (för ändliga mängder)

Kardinalitet beskriver storleken på en mängd. För ändliga mängder så brukar kardinalitet helt enkelt kallas för längd.

Kardinalitet betecknas $|A|$ och definieras (för ändliga mängder) som antalet element i A.

Ex:

$$|\{a, b, c\}| = 3$$

3.2 Vanliga mängdoperationer

Union

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \, eller \, x \in B\}$$

Snitt (intersection)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \, och \, x \in B\}$$

Mängddifferens (difference)

Olika beteckningar för mängddifferens: $A - B$, $A \setminus B$

$$A - B = \{x \mid x \in A \, och \, x \notin B\}$$

Symmetrisk differens (symmetric difference)

$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \cup B \, och \, x \notin A \cap B\}$$

Komplement (complementation)

Olika beteckningar för komplement: $\overline{A}$, $\sim A$, A^*, A^c, A'

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

Potensmängd (Power set)

En mängds potensmängd, är mängden av alla dess delmängder.

Vanliga beteckningar för potensmängd är: $P(A)$, 2^A

Den sista beteckningen har förmodligen göra med att en godtycklig mängd, med n element, har 2^n delmängder, dvs $|P(A)| = 2^{|A|}$.

3.3 Speciella mängdoperationer

Dessa mängdoperationerna kan användas bland annat då man arbetar med mängder av strängar (t ex formella språk och automatateori). Alla tre bygger på att operationen ”ihopslagning”/concatenation, eller motsvarande, är definierad för mängdmedlemmarna.

”Ihopslagning” (concatenation)

AB definieras som:

$$AB = \{xy \mid x \in A \, och \, y \in B\}$$

Ex.

a,b är strängar

$$\{a, ab\}\{b, ba\} = \{ab, aba, abb, abba\}$$

Potenser

A^n definieras rekursivt enligt:

$A^0 = \{\epsilon\}$ där ϵ är ”den tomma strängen” (null string, empty string)
$A^{n+1} = AA^n$

"Asterate" (Kleene clossure)

A^* definieras som unionen av alla ändliga potenser av A, dvs:

$$A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup ... = \{x_1 x_2 ... x_n \mid n \geq 0 \; och \; x_i \in A, \; 1 \leq i \leq n\}$$

Kapitel 4

Summor och serier

4.1 Geometrisk summa/serie

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^{n-1} = \begin{cases} \frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{då } a \neq 1 \\ n+1 & \text{då } a = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad (-1 < a < 1)$$

4.2 Aritmetisk summa

$$\sum_{k=0}^{n} (a+kd) = a + (a+d) + (a+2d) + ... + (a+nd) = \frac{(n+1)(a+(a+nd))}{2}$$

4.3 Taylorserier

4.3.1 Maclaurins formel

Om funktionen f, och dess derivator till och med ordning $n+1$, är kontinuerliga i en omgivning av 0, gäller följande för alla x i denna omgivning:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{där } 0 < \theta < 1$$

Om $f(x)$ är udda tas bara udda potenser av x med. Om $f(x)$ är jämn tas bara jämna potenser av x med.

4.3.2 Taylor's formel

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^t}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Om $R_n(x) \to 0$ då $n \to \infty$ så gäller:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \text{ (Taylor serie)}$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \text{ (Maclaurin serie)}$$

4.3.3 Standardutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$$
$$\text{där } R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$$
$$\text{där } R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$$
$$\text{där } R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!(1+\theta x)^{n+1-\alpha}}x^{n+1}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n+1}(x)$$
$$\text{där } R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{\cos\theta x}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}(x)$$
$$\text{där } R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1}(x)$$
$$\text{där } R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(1+\theta^2x^2)}x^{2n+1}$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + ... + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1} + ...$$

där B_{2n} är ett Bernoullipolynom, se 12.3 i Mathematics handbook

I samtliga ovanstående fall är θ ett tal mellan 0 och 1 som beror av x och n.

Kapitel 5

Sannolikhetslära

5.1 Grundläggande saker

Sannolikhetsmåttet P har egenskaperna:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5.1.1 Kombinatorik

Kombinationer

Det antal sätt man kan placera ut r objekt på n positioner utan hänsyn till ordningen, eller med andra ord, det antal sätt man kan välja ut r objekt bland n utan hänsyn till ordningen, betecknas och definieras enligt:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array} \right) = C\left(n, r\right) = nCr = \tfrac{n!}{r!(n-r)!}$$

Några saker som man bör ha i minnet:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) = n, \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = 1, \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1$$

Permutationer

Det antal sätt som man kan ordna n st olika objekt, med hänsyn tagen till ordningen, är $n!$.

Att ordna n objekt, med hänsyn till ordningen, kallas permutering.

Om man har n objekt, och vill permutera r st av dessa, så kan man göra det på $P(n,r)$ olika sätt. $P(n,r)$ definieras enligt:

$$P(n,r) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} & d \quad n \neq r \\ n! & d \quad n = r \end{cases}$$

5.2 Betingad sannolikhet

Betingad sannolikhet, $P(B \mid A)$, är sannolikheten för att händelsen B inträffar, givet att händelsen A redan inträffat.

Definition: $P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ om $P(A) > 0$

Multiplikationssatsen för beroende händelser:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$$

Delar man in utfallsrummet i de disjunkta händelserna A_i,så gäller:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Händelserna A och B är oberoende om

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Då gäller även:

$P(B \mid A) = P(B)$ dvs det spelar ingen roll om händelsen A har inträffat eller inte.

5.3 Endimensionella stokastiska variabler

5.3.1 Diskreta fallet

Sannolikhetsfunktionen (frekvensfunktionen), dvs sannolikheten att den stokastiska variabeln antar ett visst värde, ges av:

$$p_X(a) = P(X = a) \text{ där } a = 0, 1, 2, ...$$

Fördelningsfunktionen ges av:

$$F_X(a) = P(X \leq a) = \sum_{a_i \leq a} p_X(a_i)$$

5.3.2 Kontinuerliga fallet

Täthetsfunktionen (frekvensfunktionen, Sannolikhetstätheten), $f_X(t)$härleds ur:

$$\int_a^b f_X(t)dt = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Fördelningsfunktionen definieras på samma sätt som i det diskreta fallet:

$$F_X(a) = P(X \leq a)$$

Den kontinuerliga fördelningsfunktionen och sannolikhetstätheten har följande samband:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(t)dt \text{ (fördelningsfunktion)}$$

$$f_X(a) = \frac{dF_X(a)}{da} \text{ (täthetsfunktion)}$$

5.3.3 Allmänt

Frekvensfunktionerna (sannolikhetsfunktionen respektive sannolikhetstätheten) har egenskaperna:

$$\sum_{a=0}^{\infty} p_X(a) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(a)da = 1, \text{ dvs } F_X(a) \to 1 \text{ då } a \to \infty$$

5.4 Tvådimensionella stokastiska variabler

5.4.1 Diskreta fallet

Sannolikhetsfunktion:

$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x, Y = y) \text{ där } x = 0, 1, 2, ... \text{ och } y = 0, 1, 2, ...$$

Fördelningsfunktion:

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{j=0}^{x} \sum_{k=0}^{y} p_{X,Y}(j, k)$$

Marginalfördelningarna, p_X och p_Y, kan bestämmas ur den simultana fördelningen, $p_{X,Y}$, enligt:

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{\infty} p_{X,Y}(x, y)$$

5.4.2 Kontinuerliga fallet

Fördelningsfunktion:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Den kontinuerliga fördelningsfunktionen och täthetsfunktionen har följande samband:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)dsdt \text{ (fördelningsfunktion)}$$

$$f_{X,Y}(t,u) = \frac{\partial^2 F(t,u)}{\partial x \partial y} \text{ (täthetsfunktion)}$$

Marginalfördelningarna, f_X och f_Y, kan bestämmas ur den simultana fördelningen, $f_{X,Y}$, enligt:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$

För att beräkna sannolikheten inom ett visst definitionsområde, integrerar man täthetsfunktionen över området:

$$P((X,Y) \in B) = \int\int_{B} f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

5.4.3 Allmänt

Precis som i det endimensionella fallet så har sannolikhetsfunktionen egenskapen:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

Vid oberoende gäller:

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

5.5 Lägesmått, spridningsmått och beroendemått

Ett lägesmått anger var sannolikhetsmassan är placerad "i genomsnitt". Exempel på lägesmått är väntevärde (beteckning $E(X)$) och median. Väntevärde är i princip samma sak som medelvärde.

Spridningsmåttet anger hur utspridd fördelningen av sannolikhetsmassan är. Exempel på spridningsmått är varians $\left(\sigma^2\right)$, standardavvikelse (σ) och variationskoefficient $\left(\frac{\sigma}{E(X)}\right)$.

Beroendemått är ett mått på beroendet mellan två stokastiska variabler. Exempel på beroendemått är kovarians och korrelationskoefficienten.

5.5.1 Lägesmått

Väntevärde (medelvärde):

$$E(X) = \begin{cases} \sum\limits_x x p_X(x) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \end{cases}$$

$$E(\varphi(X)) = \begin{cases} \sum\limits_x \varphi(x) p_X(x) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_X(x) dx \end{cases}$$

$$E(\varphi(X,Y)) = \begin{cases} \sum\limits_{x,y} \varphi(x,y) p_{X,Y}(x,y) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \end{cases}$$

Medianen, för en stokastisk variabel, är ett värde som halverar sannolikhetsmassan. Medianen för en kontinuerlig stokastisk variabel, X, är det reella tal $\widetilde{m}$ för vilket $F_X(\widetilde{m}) = \frac{1}{2}$. Dvs lösningen till:

$$\int\limits_{-\infty}^{\widetilde{m}} f_X(t) dt = \frac{1}{2}$$

5.5.2 Spridningsmått

Varians:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left((X - E(X))^2 \right) = E(X^2) - E^2(X) \qquad (= \sigma_X^2)$$

Standardavvikelse:

$$\sigma_X = D(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

5.5.3 Beroendemått

Kovariansen är definierad som:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\left((X-E\left(X\right))\left(Y-E\left(Y\right)\right)\right) = \begin{cases} \sum\limits_x \sum\limits_y \left(x-E\left(X\right)\right)\left(y-E\left(Y\right)\right) p_{X,Y}(x,y) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(x-E\left(X\right)\right)\left(y-E\left(Y\right)\right) f_{X,Y}(x,y)dxdy \end{cases}$$

Ur detta får man att:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - E(X)E(Y)$$

Normerad kovarians eller korrelationskoefficient :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

5.5.4 Bra att ha

$$E\left(X^2\right) = \begin{cases} \sum\limits_x x^2 p_X(x) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \end{cases}$$

5.5.5 Räkneregler

$$E(a) = a$$
$$E(aX) = aE(X)$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$\mathrm{Var}(aX) = a^2\mathrm{Var}(X)$$
$$\mathrm{Var}(X+a) = \mathrm{Var}(X)$$

Om X och Y är oberoende gäller dessutom följande räkneregler

$$E(X\cdot Y) = E(X)E(Y)$$
$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$$
$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$, ty $\mathrm{Var}(X+(-1)Y) = \mathrm{Var}(X) + (-1)^2\mathrm{Var}(Y)$

5.6 Några diskreta fördelningar

5.6.1 Binominalfördelning, $\mathrm{Bi}(n,p)$

Sannolikhetsfunktion: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ för $k = 0,1,2,...,n$

$E(X) = np$
$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$

För oberoende $X_1 \in \mathrm{Bi}(n_1, p)$ och $X_2 \in \mathrm{Bi}(n_2, p)$ gäller:

$X + Y \in \mathrm{Bi}(n_1 + n_2, p)$

5.6.2 Poissonfördelning, $\mathrm{Po}(\mu)$

Sannolikhetsfunktion: $p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ för $k = 0, 1, 2, ...$

$E(X) = \mu$
$\sigma_X = \sqrt{\mu}$

För oberoende $X_1 \in \mathrm{Po}(\mu_1)$ och $X_2 \in \mathrm{Po}(\mu_2)$, gäller:

$X + Y \in \mathrm{Po}(\mu_1 + \mu_2)$

5.6.3 Hypergeometrisk fördelning, $\mathrm{Hyp}(N, n, p)$

Sannolikhetsfunktion: $p_X(k) = \dfrac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ för $0 \leq k \leq Np$ och $0 \leq n - k \leq N - Np$

$E(X) = np$
$\sigma_X = \sqrt{\frac{N-n}{N-1} np(1-p)}$

5.6.4 "För första gången"-fördelning, $\mathrm{Ffg}(p)$

Sannolikhetsfunktion: $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ för $k = 1, 2, ...$

$E(X) = \frac{1}{p}$
$\sigma_X = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

5.6.5 Geometrisk fördelning, $\mathrm{Ge}(p)$

Sannolikhetsfunktion: $p_X(k) = p(1-p)^k$ för $k = 0, 1, 2, ...$

$E(X) = \frac{1-p}{p}$
$\sigma_X = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}$

5.7 Några kontinuerliga fördelningar

5.7.1 Rektangulär (likformig) fördelning, $\mathrm{Re}(a, b)$

Täthetsfunktion: $f(x) = \frac{1}{b-a}$ för $a < x < b$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma_X = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

5.7.2 Exponentialfördelning, $\mathrm{Exp}(\mu)$

Täthetsfunktion: $f(x) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}$ för $x \geq 0$ (= 0 då x < 0)

$$E(X) = \mu$$
$$\sigma_X = \mu$$

5.7.3 Normalfördelning, $\mathrm{N}(m, \sigma)$

Täthetsfunktion: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ för alla x

$$E(X) = m$$
$$\sigma_X = \sigma$$

Standardiserad normalfördelning

Om $X \in \mathrm{N}(m, \sigma)$ så är $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ den standardiserade stokastiska variabeln till X.

$$Z \in \mathrm{N}(0, 1) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$F_Z(z) = \Phi(z)$ finns tabulerad för $z > 0$. För $z < 0$ utnyttjar man sambandet $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Räkneregler

Om $Y = aX + b$ så är $Y \in \mathrm{N}(am + b, \sigma\,|a|)$.

För oberoende $X_1 \in \mathrm{N}(m_1, \sigma_1)$ och $X_2 \in \mathrm{N}(m_2, \sigma_2)$, gäller:

$$X_1 + X_2 \in \mathrm{N}\left(m_1 + m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$
$$aX_1 + bX_2 \in \mathrm{N}\left(am_1 + bm_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2}\right)$$

Kapitel 6

Statistik

6.1 Köteori

6.1.1 Grundläggande begrepp för kömodeller/betjäningssystem

Ett generellt kösystem kan beskrivas enligt A/B/c/K/m/O, där

A anger fördelningstypen för tiden mellan kundankomster.
B anger fördelningstypen för betjäningstiden.
c anger antalet betjäningsenheter (”antal kassor”)
K anger det maximala antalet kunder i systemet.
m anger antalet potentiella kunder (kundpopulationen).
O anger betjäningsordningen.

Om man inte anger K eller m så antar man att de är obegränsade, dvs K = m = ∞. Anger man inte O så antar man att kunderna tas om hand i tur och ordning. Bokstaven ”M” på någon av de två första platserna står för ”Markovsk”, vilket betyder exponentialfördelning. Alternativa fördelningar som man kan stöta på är till exempel ”D”, deterministisk, eller ”G”, generell.

Följande stokastiska variabler är intressanta i ett betjäningssystem:

$N_q(t)$: antal kunder i kön vid tiden t
$N_s(t)$: antal kunder som betjänas vid tiden t
$N(t) = N_q(t) + N_s(t)$: antal kunder i kön vid tiden t

Q: Kötiden för en kund (queue time)
S: Betjäningstiden för en kund (service time)
$W = Q + S$: Väntetiden för en kund (wait time)

I kömodellerna används följande parametrar:

Inkommande intensitet: λ
Betjäningsintensitet: μ
Trafikintensitet: $u = \frac{\lambda}{\mu}$
Utnyttjandegrad: $\rho = \frac{u}{c}$, där c är antalet betjäningar.

6.1.2 Little's formler

$E(N(t)) = \lambda E(W)$
$E(N_q(t)) = \lambda E(Q)$

6.1.3 Kömodeller

M/M/1

Modell för kösystem med en betjäningsenhet.

$F_Q(t) = P(Q \leq t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$, där $t \geq 0$
$F_W(t) = P(W \leq t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t}$, där $t \geq 0$

M/M/c

Modell för kösystem med godtyckligt många betjäningsenheter.

$F_W(t) = P(Q \leq t) = 1 - \frac{p_c}{1-\rho} e^{-c\mu(1-\rho)t}$, där $p_c = P(N(t) = c)$

M/M/c/c

Modell för kösystem med godtyckligt många betjäningsenheter, där kö tillåts.

En M/M/c/c kö är full då $N(t) = c$ detta medför att

$\mathrm{P(full)} = \mathrm{P}(N(t) = c) = p_c$

M/M/c/K/K

Modell för kösystem med godtyckligt många betjäningsenheter, där hela populationen av kunder har möjlighet att vara i systemet samtidigt. Modellen kallas även "maskin-reparatör modellen" eller "terminal-dator modellen".

6.2 Skattningar

6.2.1 Effektivitet mellan skattningar

Effektiviteten hos den sämre skattningen relativt den bättre definieras som:

$\frac{\mathrm{Var}(Bttre)}{\mathrm{Var}(Smre)}$

Kapitel 7

Signaler och system

7.1 Blandat

Dessa kommer från det senaste omtentaplugget till krets 2, vilket förklarar att det mest är tidsdiskreta grejer här just nu...

7.1.1 Diracimpuls

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

7.1.2 Enhetsimpuls

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

7.1.3 Enhetssteg

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

7.1.4 Impulssvar

7.1.5 Stegsvar

7.1.6 Stabilitet

Ett system är stabilt då $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$, vilket är ekvivalent med att enhetscirkeln, $|z| = 1$, tillhör konvergensområdet för systemfunktionen, $H[z]$.

Ett system är marginellt stabilt då $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \infty$, men $|h[n]| < \infty$ för alla n. Detta är ekvivalent med att det finns en eller flera poler på enhetscirkeln, $|z| = 1$, då enhetscirkeln utgör en rand till konvergensområdet.

7.1.7 Kausalitet

Ett system är kausalt då $h[n] = 0$ för $n < 0$, dvs utsignalen kan ej bero på framtida insignaler. Konvergensområdet för $H[z]$ måste vara av typen $|z| > a$ då $a \in \Re_+$.

7.1.8 Anti-kausalitet

Ett system är anti-kausalt då $h[n] = 0$ för $n \geq 0$. Konvergensområdet för $H[z]$ måste vara av typen $|z| < a$ då $a \in \Re_+$.

7.1.9 Icke-kausalitet

Ett system är icke-kausalt då $h[n] \neq 0$ för minst ett positivt, och ett negativt, n-värde. Konvergensområdet för $H[z]$ måste vara av typen $a < |z| < b$ då $a, b \in \Re_+$.

7.2 Lite användbara formler mm

$$sinc(at) = \frac{sin(\pi at)}{\pi at}$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ f_s = \frac{1}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \omega = 2\pi f \\ f_s = \frac{\omega}{2\pi} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \frac{\Omega}{2\pi} \\ \omega = \frac{\Omega}{T} \Rightarrow \Omega = \omega T \\ \omega = 2\pi f \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\omega T}{2\pi} = \frac{2\pi f T}{2\pi} = fT$$

7.3 Sampling och rekonstruktion

7.3.1 Sampling

Poissons summationsformel beskriver sambandet mellan $X(\omega)$ och $X[\Omega]$.

$$X[\Omega] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

Samplingsteoremet säger att om sampelfrekvensen är mer än dubbelt så stor som dubbla bandbredden, dvs $f_s > 2f_0$, så kan $x(t)$ återskapas fullständigt från $x[n]$.

7.3.2 Rekonstruktion

Ideal rekonstruktion

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, sinc\,(f_s(t - nT))$$

$$X_r(\omega) = TX[\omega T],\ |\omega| \leq \pi f_s$$

7.3.3 Undersampling

Undersampling är sampling då sampelfrekvensen är mindre än dubbla bandbredden, dvs $f_s < 2f_0$. Signalen kan alltså inte återskapas fullständigt.

Den rekonstruerade signalen kan betecknas $x_r(t) = x(t) + e(t)$, där $x(t)$ är den ursprungliga signalen, och $e(t)$ är en felsignal orsakad av bandbegränsningsdistortion och vikningsdistortion, $e(t) = e_b(t) + e_v(t)$.

Kapitel 8

Automatateori

8.1 Deterministic Finite Automata, DFA

En DFA är en struktur enligt:

$M = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ där

Q är en ändlig mängd av tillstånd (states)
Σ är alfabetet som används (input alphabet)
δ är överföringsfunktionen (transition function), som är definierad enligt:

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$, där $Q \times \Sigma = \{(q, a) \mid q \in Q, a \in \Sigma\}$

s är start tillståndet
F är mängden av sluttillstånd (accept states, final states)

8.2 Non-deterministic Finite Automata, NFA

En NFA är en struktur enligt:

$N = (Q, \Sigma, \Delta, S, F)$ där

Q är en ändlig mängd av tillstånd (states)
Σ är alfabetet som används (input alphabet)
Δ är överföringsfunktionen (transition function), som är definierad enligt:

$\Delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$
$\Delta(q, a)$ är mängden av tillstånd som man kan flytta till på ett steg från q, då man läser a.
2^Q är Q:s potensmängd, dvs mängden av alla delmängder till Q.

S är en mängd av starttillstånd
F är mängden av sluttillstånd (accept states, final states)

8.3 NFA with ϵ - transitions, NFA$_\epsilon$

En NFA$_\epsilon$ är identisk med en NFA förutom definitionen på överförings funktionen.

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

"ϵ - clossure(A)" definieras som alla tillstånd som kan nås från A, utan att läsa någonting.

Kapitel 9

Talteori

9.1 Talsystem

$\mathbb{N}$	Mängden av naturliga tal $\{0, 1, 2, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$	Mängden av heltal $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$	Mängden av positiva / negativa heltal. Ej 0.
$\mathbb{Q}$	Mängden av rationella tal $\{a/b \mid a, b \in Z,\ b \neq 0\}$.
$\mathbb{Q}^+, \mathbb{Q}^-$	Mängdenav positiva / negativa rationella tal.
$\mathbb{Q}^*$	Mängden av alla rationella tal förutom 0.
$\mathbb{R}$	Mängden av reella tal. Består av de rationella talen samt tal som π, e, etc.
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$	Mängden av positiva / negativa reella tal.
$\mathbb{R}^*$	Mängden av alla reella tal förutom 0.
$\mathbb{C}$	Mängden av komplexa tal $\left\{x + \imath y \mid x, y \in \mathbb{R},\ \imath^2 = -1\right\}$
$\mathbb{C}^*$	Mängden av alla komplexa tal förutom 0.